

Подготовка к заданию 17 ОГЭ

Задание 17 ОГЭ по математике представляет собой задачу по теме «Четырёхугольники». Напомним свойства и теоремы, связанные с четырёхугольниками, изучаемыми в основной школе.

Сначала приведём основные факты, связанные с параллелограммом:

- противоположные стороны параллелограмма параллельны и равны;
- сумма углов параллелограмма равна 360° ;
- сумма двух углов параллелограмма, прилежащих к одной из его сторон, равна 180° ;
- диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Пусть a и b — длины двух смежных сторон параллелограмма, h_a и h_b — соответственно высоты, проведённые к этим сторонам, γ — угол между этими сторонами, S — площадь параллелограмма. Основные формулы для вычисления площади параллелограмма:

$$S = ah_a = bh_b = ab \sin \gamma.$$

Кроме того, для параллелограмма, разумеется, справедлива и формула площади произвольного выпуклого четырёхугольника: если d_1 и d_2 — длины диагоналей выпуклого четырёхугольника, γ — угол между ними, то площадь S этого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними, то есть

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \gamma.$$

Пример 1. Один из углов параллелограмма равен 41° . Найдите больший угол этого параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

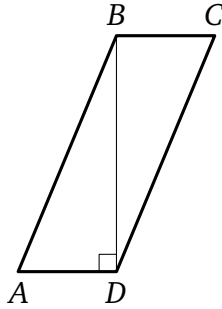
Решение.

Для того, чтобы найти больший угол параллелограмма, нужно из 180° вычесть меньший угол параллелограмма. Следовательно, больший угол этого параллелограмма равен

$$180^\circ - 41^\circ = 139^\circ.$$

Ответ: 139° .

Пример 2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, в котором $AB = 13$, $AD = 5$, $BD = 12$.

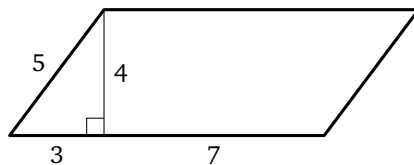


Решение.

Задачу можно решать разными способами. По следствию теоремы косинусов для треугольника ABD можно найти косинус угла A , затем его синус, после чего вычислить площадь параллелограмма как произведение двух сторон на синус угла между ними. А можно заметить, что $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$ и, значит, $AB^2 = AD^2 + BD^2$. Тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABD прямоугольный с прямым углом D , то есть диагональ BD параллелограмма является его высотой. Поэтому площадь S параллелограмма находится по формуле $S = AD \cdot BD = 5 \cdot 12 = 60$.

Ответ: 60.

Пример 3. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



Решение.

По формуле для площади параллелограмма имеем:

$$S = ah_a = (3 + 7) \cdot 4 = 40.$$

Ответ: 40.

Важнейшими частными случаями параллелограмма являются прямоугольник, ромб, квадрат. Они обладают всеми свойствами параллелограмма, но для них справедливы и некоторые дополнительные свойства, которыми произвольные параллелограммы не обладают:

- диагонали прямоугольника (а значит, и квадрата) равны;
- диагонали ромба (а значит, и квадрата) взаимно перпендикулярны;
- диагонали ромба (а значит, и квадрата) являются биссектрисами его углов.

Площадь S прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон a и b , то есть $S = ab$. Площадь S квадрата равна квадрату его стороны a ,

то есть $S = a^2$. Для вычисления площадей прямоугольника и ромба можно использовать формулу площади выпуклого четырёхугольника. Поскольку диагонали d_1 и d_2 ромба взаимно перпендикулярны, из последней следует, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \frac{1}{2}d_1d_2$.

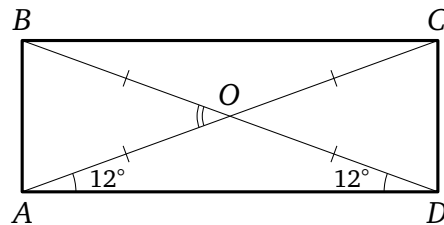
Пример 4. Диагональ квадрата равна $7\sqrt{2}$. Найдите его площадь.

Решение.

Диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ раз больше его стороны, значит, сторона этого квадрата равна 7, а площадь квадрата равна 49.

Ответ: 49.

Пример 5. Диагональ прямоугольника образует с одной из его сторон угол 12° . Найдите угол между прямыми, содержащими диагонали этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

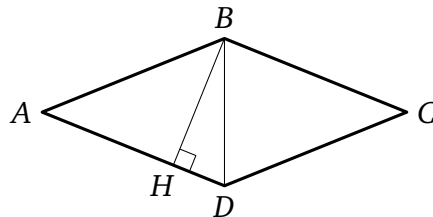


Решение.

Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник, O — точка пересечения его диагоналей, и пусть $\angle CAD = 12^\circ$. Поскольку диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, треугольник AOD равнобедренный, причём $\angle ODA = \angle OAD = 12^\circ$. Значит, $\angle AOD$ тупой и не может быть углом между прямыми (напомним, что угол между двумя прямыми — меньший из вертикальных углов, образуемых при их пересечении, поэтому он не превосходит 90°). Следовательно, искомый угол равен внешнему углу треугольника AOD (например, углу AOB) и, значит, равен сумме внутренних не смежных с ним углов, то есть сумме $\angle ODA + \angle OAD = 24^\circ$.

Ответ: 24° .

Пример 6. В ромбе $ABCD$ угол A равен 44° . Из вершины B проведена высота BH к стороне AD . Найдите угол HBD . Ответ дайте в градусах.



Решение.

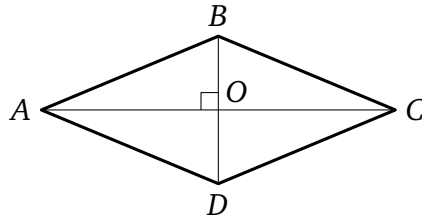
В ромбе все стороны равны, значит, треугольник BAD равнобедренный и

$$\angle ABD = \angle ADB = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник BHD . Острый угол HDB в нём равен 68° , значит, угол HBD равен 22° .

Ответ: 22° .

Пример 7. Найдите площадь ромба, если его диагональ равна 24, а сторона равна 13.



Решение.

Пусть $ABCD$ — данный ромб, O — точка пересечения его диагоналей, и пусть $AB = BC = CD = AD = 13$, $AC = 24$. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Поэтому $AO = 12$, а треугольник AOB прямоугольный. Из теоремы Пифагора для этого треугольника находим

$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Тогда $BD = 10$, а площадь S ромба находится как половина произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = 120.$$

Ответ: 120.

Трапеция является более сложным четырёхугольником по сравнению с параллелограммом, поскольку у неё параллельны только две стороны (основания трапеции), а две другие не параллельны (боковые стороны трапеции). Трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям, называется прямоугольной; трапеция, боковые стороны которой равны, называется равнобедренной (диагонали такой трапеции равны, углы при любом из оснований также равны). Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.

Если a и b — длины оснований трапеции, h — её высота, то площадь трапеции вычисляется по формуле $S = \frac{a+b}{2}h$.

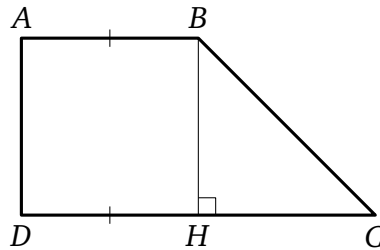
Пример 8. Сумма трёх углов равнобедренной трапеции равна 222° . Найдите меньший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Сумма всех углов трапеции равна 360° , значит, её четвёртый угол равен $360^\circ - 222^\circ = 138^\circ$. Угол, прилежащий к той же боковой стороне, что и найденный, равен $180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$. Два оставшихся угла также равны 138° и 42° , поскольку в равнобедренной трапеции углы, прилежащие к одному основанию, равны. Значит, искомый угол этой трапеции равен 42° .

Ответ: 42° .

Пример 9. Найдите острый угол прямоугольной трапеции, основания которой равны 18 и 9, а меньшая боковая сторона равна 9. Ответ дайте в градусах.



Решение.

В любой прямоугольной трапеции два угла прямые, один тупой, и один острый. Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$, в которой $AB = AD = 9$, $CD = 18$. Искомый угол — угол C . Проведём высоту BH . Она равна AD и равна 9. Тогда $DH = AB = 9$ (как противоположные стороны прямоугольника $ABHD$), и, значит, $CH = CD - DH = 9$. Но тогда в прямоугольном треугольнике BHC катеты равны, значит, это равнобедренный прямоугольный треугольник и угол C равен 45° .

Ответ: 45° .

Пример 10.

Основания трапеции относятся как $1 : 3$, а средняя линия равна 16. Найдите большее основание этой трапеции.

Решение.

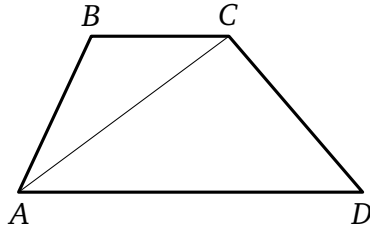
Пусть основания трапеции равны a и b , причём $a = 3b$. Тогда её средняя линия равна

$$\frac{a + b}{2} = \frac{3b + b}{2} = 2b = 16,$$

откуда $b = 8$. Значит, $a = 24$.

Ответ: 24.

Пример 11. Основания трапеции относятся как $2 : 5$. Диагональ делит трапецию на два треугольника, площадь меньшего из которых равна 4. Найдите площадь трапеции.



Решение.

Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC , считая, что $AD : BC = 5 : 2$. Диагональ AC делит трапецию на два треугольника, имеющих общую высоту — высоту трапеции. Значит, их площади относятся как основания, к которым проведена эта высота, то есть как основания трапеции. При этом треугольник меньшей площади будет иметь меньшее основание. Тогда $S_{ABC} = 4$, $\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{5}{2}$, откуда $S_{ACD} = \frac{5}{2}S_{ABC} = 10$. Следовательно, $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 14$.

Ответ: 14.