Подготовка к заданию 15 ОГЭ

Задание 15 ОГЭ математике — это несложная планиметрическая задача в одно-два действия, проверяющая владение базовыми знаниями по теме «Треугольники».

Напомним основные факты, связанные с треугольниками:

- сумма углов треугольника равна 180°;
- внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов треугольника;
- высоты треугольника пересекаются в одной точке;
- биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром вписанной окружности треугольника);
- серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром описанной окружности треугольника);
- медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершин треугольника;
- средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

Если a, b, c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — соответственно высоты, проведённые к этим сторонам, α, β, γ — противолежащие этим сторонам углы, r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, S — его площадь, то справедливы следующие формулы:

1) $S=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c$;

2) $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha=\dfrac{1}{2}ac\sin\beta$;

3) $S=\dfrac{abc}{4R}$;

4) $S=pr$;

5) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

6) $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$ (теорема синусов);

7) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$ (теорема косинусов).

Пример 1. В треугольнике два угла равны 57° и 86°. Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Сумма углов треугольника равна 180°. Следовательно, чтобы найти третий угол треугольника, нужно сложить два известных угла и вычесть их сумму из 180°:

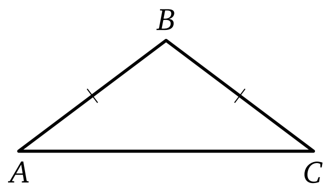
$$180^\circ - (57^\circ + 86^\circ) = 37^\circ.$$

Ответ: 37°.

Важным частным случаем треугольника является равнобедренный треугольник. В таком треугольнике углы при основании равны, а высота, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой, поэтому именно на ней находятся центры вписанной и описанной окружностей этого треугольника.

Частный случай равнобедренного треугольника — равносторонний треугольник. В нём уже каждая высота является медианой и биссектрисой, поэтому центры вписанной и описанной окружностей совпадают и $R = 2r$.

Пример 2. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 108^\circ$. Найдите угол BCA. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Сумма углов треугольника равна 180°. Следовательно, сумма неизвестных углов $\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. Поскольку треугольник ABC равнобедренный, углы BAC и BCA равны как углы при основании. Значит,

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ.$$

Ответ: 36°.

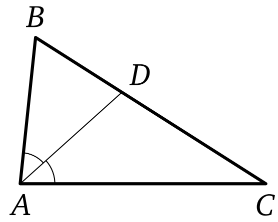
Пример 3. Найдите периметр равностороннего треугольника, если одна из его средних линий равна 25.

Решение.

Поскольку все стороны равностороннего треугольника равны и каждая из них вдвое больше его средней линии, длина стороны данного равностороннего треугольника будет равна 50, а его периметр — 150.

Ответ: 150.

Пример 4. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 82^\circ$, AD — биссектриса. Найдите угол BAD. Ответ дайте в градусах.



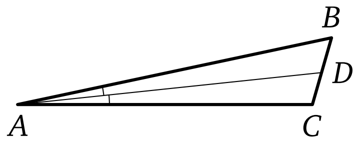
Решение.

Луч AD — биссектриса угла BAC, значит, угол BAD равен углу DAC и $\angle BAD + \angle DAC = \angle BAC$. Следовательно,

$$\angle BAD = \frac{\angle BAC}{2} = \frac{82^\circ}{2} = 41^\circ.$$

Ответ: 41°.

Пример 5. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, угол C равен 106°, угол CAD равен 6°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.



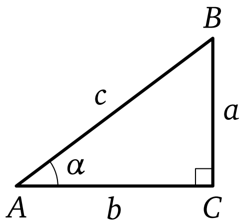
Решение.

Поскольку AD — биссектриса угла BAC, он вдвое боьше угла CAD, то есть равен 12°. Но тогда

$$\angle B = 180^\circ - \angle BAC - \angle C = 180^\circ - 12^\circ - 106^\circ = 62^\circ.$$

Ответ: 62°.

Особое место среди всех треугольников занимает прямоугольный треугольник.



Для прямоугольного треугольника справедлива теорема Пифагора, а синус, косинус или тангенс его острого угла можно найти как отношение катета к гипотенузе или катета к катету. Таким образом, для прямоугольного треугольника с катетами a и b и гипотенузой c справедливы следующие основные формулы:

- $a^2 + b^2 = c^2$ — теорема Пифагора;

- $S = \dfrac{1}{2}ab$;
- середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин, то есть является центром описанной окружности треугольника, а радиус этой окружности равен половине гипотенузы: $R = \dfrac{c}{2}$;
- $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$;
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — основное тригонометрическое тождество.

Пример 6. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 8, а гипотенуза равна 17. Найдите второй катет этого треугольника.

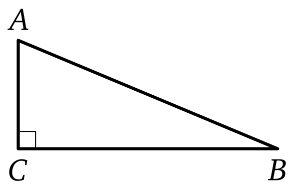
Решение.

При решении этой задачи вполне можно обойтись без рисунка. Из теоремы Пифагора следует, что второй катет этого треугольника равен

$$\sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{(17-8)(17+8)} = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15.$$

Ответ: 15.

Пример 7. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \dfrac{12}{13}$, $AC = 10$. Найдите BC.



Решение.

Задачу можно решить несколькими способами, например, так. Поскольку $\sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{12}{13}$, можно считать, что $BC = 12x$, $AB = 13x$. По теореме Пифагора $(12x)^2 + 10^2 = (13x)^2$, откуда $x = 2$, и, следовательно, $BC = 24$.

Задачу можно было бы решать и следующим способом. По основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$. Следовательно,

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169},$$

откуда $\cos A = \dfrac{5}{13}$. Тогда $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5}{13}$. Поскольку $AC = 10$, получаем, что $AB = 26$. По теореме Пифагора

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 26^2 - 10^2 = 24^2.$$

Отсюда $BC = 24$.

Ответ: 24.

Пример 8. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 6$, $AB = 10$. Найдите $\sin B$.

Решение.

Поскольку катет AC является противолежащим к углу B, а AB является гипотенузой, получаем, что

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Ответ: 0,6.

Пример 9. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, $AC = 18$, $MN = 8$. Площадь треугольника ABC равна 81. Найдите площадь треугольника MBN.

Решение.

Треугольники MBN и ABC подобны (по двум углам) с коэффициентом подобия

$$k = \frac{AC}{MN} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}.$$

Поскольку площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия, получаем, что

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MBN}} = \left(\frac{9}{4}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{81}{S_{MBN}} = \frac{81}{16}.$$

Значит, площадь треугольника MBN равна 16.

Ответ: 16.