

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1–10.

1. Вычислите

$$(0,875 : 0,75^2 - 1,75 \cdot 0,(6)) \cdot \frac{4,8 \cdot 7,5}{187 : 11 - 9,(9)}$$

2. Известно, что $a + b + c = 5$ и $ab + bc + ac = 4$. Найдите $a^2 + b^2 + c^2$.

3. Пункты A и B расположены на реке на некотором расстоянии, а пункты C и D на озере на таком же расстоянии. Катер проплывает от A до B за 2 часа, а от B до A — за 3 часа. За какое время катер проплывёт от C до D ? Катер движется с постоянной собственной скоростью.

4. В прямоугольном треугольнике ABC вписанная окружность разбивает гипотенузу на отрезки длиной 1 и 3. Найдите площадь треугольника.

5. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 4} < x + 3$.

6. Прямая касается окружности в точке C и параллельна хорде $AB = 10$. Найдите радиус окружности, если $AC = 13$.

7. Два натуральных числа таковы, что их разность равна 96, а их наименьшее общее кратное равно 630. Найдите эти числа (укажите все варианты).

8. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения $x^2 + y^2$ при условии, что x и y удовлетворяют неравенству $|x + 2| + |y - 4| \leq 2$.

9. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист три раза попал в мишени и два раза промахнулся.

10. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\frac{x^2 - 2(2a + 1)x + 3a^2 - 3}{x^2 - 10x + 9} = 0$$

имеет ровно один корень.

Часть 2

К задачам 11–12 приведены рукописные тексты решений.

1) Проверьте решения и опишите в Вашей работе найденные ошибки.

2) Предложите способ исправить ошибки, получить верное решение и дайте верный ответ.

11. В выпуклом шестиугольнике все углы равны 120° . Четыре последовательные стороны имеют длины 3, 4, 4, 5. Найдите две оставшиеся стороны шестиугольника.

Все углы выпуклого шестиугольника равны 120° , поэтому в него можно вписать окружность.

Тогда
$$\begin{cases} AB + BC = DE + EF \\ BC + CD = AF + EF \\ CD + DE = AF + AB \end{cases}$$

Имеем
$$\begin{cases} 7 = 5 + x \\ 8 = x + y \\ 9 = 3 + x \end{cases} \quad x = 6, y = 2.$$

Ответ: 2; 6.

12. Решите уравнение $x^2 + \frac{x^2}{(x-1)^2} = 8$.

Пусть $x-1 > 0$. Тогда по неравенству о средних $x^2 + \frac{x^2}{(x-1)^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{x^2}{(x-1)^2}} = \frac{2x^2}{x-1}$

приём $\frac{2x^2}{x-1} \geq 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x-2)^2 \geq 0$.

Равенство возможно только при $x=2$. Случай $x-1 < 0$ рассматривается аналогично из-за чётности. Ответ: ± 2 .

Критерии проверки работы

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов.

2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами.

1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче.

0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 2.

2. 17.

3. 2 ч 24 мин.

4. 3.

1 балл — верно найден радиус вписанной окружности ($r = \sqrt{7} - 2$).

5. $(-\frac{13}{6}; -2] \cup [2; +\infty)$.

0 баллов — забыто условие $x + 3 \geq 0$ (или $x + 3 > 0$).

6. $\frac{169}{24}$.

1 балл — доказано, что треугольник ABC — равнобедренный.

7. 126 и 30.

1 балл — доказано, что оба числа делятся на 6.

8. 8 и 40.

1 балл — верно построено множество, заданное неравенством (квадрат с вершинами в верно найденных точках).

9. $0,8^3 \cdot 0,2^2 \cdot C_5^2 = 0,2048$.

0 баллов — получен неверный ответ $0,8^3 \cdot 0,2^2$;

2 балла — ответ выписан в виде $0,8^3 \cdot 0,2^2 \cdot C_5^2$, но при вычислении допущена арифметическая ошибка.

10. $-2; -2/3; 10$.

1 балл — ответ отличается от верного включением $a = 2$.

1 балл — ответ отличается от верного исключением одного из значений.

11. 2; 6.

1 балл — верно указаны ошибки в представленном решении: 1) утверждение о том, что в шестиугольник можно вписать окружность неверно; 2) система неверна (для описанного шестиугольника необязательно выполняются выписанные равенства).

1 балл — верно решена задача, но ошибка в представленном решении не описана или описана не полностью.

12. 2; $-1 \pm \sqrt{3}$.

1 балл — верно указана ошибка в представленном решении: функция $x^2 + \frac{x^2}{(x-1)^2}$ не является чётной.

1 балл — верно решено уравнение, но ошибка в представленном решении не описана или описана неверно.